César Abuauad

SOBRE UNA GENERALIZACION DE LA TRANSPUESTA DE UNA APLICACION LINEAL

Proposición 1. *Sean M, N, R y S cuatro $\triangle$-módulos. Si $f\colon M \longrightarrow N$ y $u\colon R \longrightarrow S$ son lineales, la aplicación*
$fxu\colon Hom(N,R) \longrightarrow Hom(M,S)$,
definida por
$(fxu)(y') = uoy'of = o$, todo y' en $Hom(N,R)$,
se llama la transpuesta de f respecto de u. *Se tiene:*

(1). fxu es lineal. Si u es un monomorfismo, entonces $nucl\ fxu = nucl\ jxu =$ submódulo de $Hom(N,R)$ formado por todos los elementos y' tales que $y'(f(M)) = \{o\}$, $j\colon f(M) \longrightarrow N$ siendo la aplicación canónica. Por lo tanto, si f es un epimorfismo, entonces fxu es un monomorfismo.

(2). $(f+g)\ xu = fxu + gxu$, $fx(u+v) = fxu + fxv$, $(\gamma f)\ xu = \gamma(fxu) = fx(\gamma u)$ para todo f, g en $Hom(M,N)$, todo u, v en $Hom(R,S)$ y todo γ en el centro del anillo $\triangle$.

(3). Si $f\colon M \longrightarrow N$, $g\colon N \longrightarrow P$, $u\colon R \longrightarrow S$ y $v\colon S \longrightarrow T$ son lineales, entonces
$(gof)\,x\,(vou) = (fxv)\,o\,(gxu)$.

(4). Si $i\colon M \longrightarrow M$ y $k\colon R \longrightarrow R$ son las aplicaciones canónicas, entonces $ixk\colon Hom(M,R) \longrightarrow Hom(M,R)$ es la aplicación canónica.

(5). Si $f\colon M \longrightarrow N$ y $u\colon R \longrightarrow S$ son isomorfismos, g y v los isomorfismos recíprocos de f y u respectivamente, entonces
$fxu\colon Hom(N,R) \longrightarrow Hom(M,S)$ es un isomorfismo y gxv es el isomorfismo recíproco.

Teorema 1. *Sea A un submódulo de M,*

$i\colon A \longrightarrow M$, $\pi\colon M \longrightarrow M/A$ las aplicaciones canónicas.
$u\colon R \longrightarrow S$, $v\colon S \longrightarrow T$ lineales.
Entonces

(1). u monomorfismo $\Longrightarrow$ πxu monomorfismo
(2). u isomorfismo, v monomorfismo $\Longrightarrow$ imagen de $\pi xu = nucl\ ixv$.

Luego, $Hom(M/A, R) \simeq$ nucl ixv.

(3). Si A tiene suplementario y u es un isomorfismo, entonces ixu: $Hom(M, R) \longrightarrow Hom(A, S)$ es un epimorfismo, luego $Hom(A, S) \simeq Hom(M, R)/$nucl ixu.

Dem. (1). Prop. 1.

(2). $\pi o i = o$, luego $(ixv)\, o\, (\pi x u) = (\pi o i)\, x\, (v o u)\, o$, luego la imagen de $\pi x u$ está contenida en el núcleo de ixv.

Sea $(ixv)\ (x') = vox'\, oi = o$ para algún x' en Hom (M, S); por ser v un monomorfismo, $x'\, oi = o$, luego
nucl $\pi = A =$ imagen de i $\subset$ nucl x',
luego hay g: $M/A \longrightarrow S$ lineal tal que $go\pi = x'$; siendo u un isomorfismo, hay t′: $M/A \longrightarrow R$ lineal tal que $uot' = g$, luego
$(\pi x u)\ (t') = (uot')\ o\pi = go\pi = x'$.

(3). Hay f: $M \longrightarrow A$ lineal tal que $foi = j$, donde j: $A \longrightarrow A$ es la aplicación canónica; si w es el isomorfismo recíproco de u, entonces $(ixu)\ o\ (fxw) = (foi)\ x\ (uow) = jxl$,
donde l: $S \longrightarrow S$ es la aplicación canónica; pero
jxl: Hom $(A, S) \longrightarrow$ Hom (A, S) es la aplicación canónica, luego ixu es un epimorfismo.

Proposición 2. *Sea $M = A + B$ directa, u: $R \longrightarrow S$ monomorfismo, i: $A \longrightarrow M$ y j: $B \longrightarrow M$ las aplicaciones canónicas.*
Entonces
$Hom(M, R) =$ nucl ixu + nucl jxu es directa;
si además, u es un isomorfismo, entonces
$Hom(A, R) \simeq$ nucl jxv, $Hom(B, R) \simeq$ nucl ixv,
donde v es el isomorfismo recíproco de u; asimismo,
$Hom(A, S) \simeq Hom(M, R)$ / nucl ixu,
$Hom(B, S) \simeq Hom(M, R)$ / nucl jxu.

Dem. Sea x' un elemento de (nucl ixu) $\cap$ (nucl jxu); entonces $(ixu)\ (x') = o = (jxu)\ (x')$, luego $x'\, oi = o = x'\, oj$, luego A y B están contenidos en el núcleo de x'; si pues x está en M y $x = a + b$, $a\varepsilon A$, $b\varepsilon B$, entonces $x'(x) = x'(a) + x'(b) = o + o = o$, luego $x' = o$.

Sea x' un elemento de Hom (M, R). Pongamos,
$y' = (\pi_B x x')\ (j)$, $z' = (\pi_A x x')\ (i)$,
donde i: $A \longrightarrow M$, j: $B \longrightarrow M$, π_A: $M \longrightarrow A$ y π_B: $M \longrightarrow B$ son las aplicaciones canónicas; desde que $\pi_B\, oi = o = \pi_A\, oj$, entonces

$y': M \longrightarrow R$, $z': M \longrightarrow R$ son lineales, $y' + z' = x'$ y
$(ixu)(y') = o = (jxu)(z')$.

Supongamos ahora que u es un isomorfismo y v es el isomorfismo recíproco; por prop 1, Hom (B, R) es isomorfo con Hom (M/A, R) y por teor 1, Hom (M/A, R) es isomorfo con nucl ixv; desde que A tiene suplementario, por teor 1, Hom (A, S) es isomorfo con
Hom (M, R)/nucl ixu.

Teorema 2. *Sea $f: M \longrightarrow N$ lineal, $g: N \longrightarrow P$ epimorfismo, $u: R \longrightarrow S$ lineal, $v: S \longrightarrow T$ lineal y $f(M) =$ nucl g.*
Entonces

(1). u monomorfismo $\Longrightarrow$ gxu monomorfismo

(2). u isomorfismo, v monomorfismo $\Longrightarrow$ imagen de gxu = nucl fxv
Luego, Hom (P, R) $\simeq$ nucl fxv

(3). Si f(M) tiene suplementario y u es un isomorfismo, entonces la imagen de gxu tiene suplementario y Hom (f(M), S) es isomorfo con la imagen de fxu.

Dem. (1). Prop 1.

(2). gof = o, luego o = (gof) x (vou) = (fxv) o (gxu), luego la imagen de gxu está contenida en nucl fxv.

Sea (fxv) $(y') = voy'of = o$ para algún y' en Hom (N, S); entonces $y'of = o$, luego nucl $g = f(M) \subseteq$ nucl y', luego hay $p': P \longrightarrow S$ lineal tal que $p'og = y'$. Siendo u un isomorfismo, hay $q': P \longrightarrow R$ lineal tal que $uoq' = p'$, luego
$(gxu)(q') = uoq'og = p'og = y'$.

(3). Sea $N = f(M) + N_1$ directa; por prop 2, son sumas directas,
(a). Hom (N, S) = nucl ixv + nucl jxv y
(b). Hom (N, R) = nucl ixu + nucl jxu,
donde $i: f(M) \longrightarrow N$ y $j: N_1 \longrightarrow N$ son las aplicaciones canónicas;
por (2) y prop 1,
imagen de gxu = nucl fxv = nucl ixv,
luego por (a), nucl jxv es un suplementario de la imagen de gxu.

Según prop 2, (b) y prop 1, tenemos los isomorfismos
Hom (f (M), S) $\simeq$ nucl jxu $\simeq$ Hom (N, R)/nucl ixu =
= Hom (N, R) / nucl fxu, de donde resulta que
Hom (f (M), S) $\simeq$ imag fxu.