Gerold Stahl

LA IDENTIDAD DE LO INDISCERNIBLE

El presente artículo tratará el problema de la identidad de lo indiscernible y analizará críticamente un caso especial, señalado por Behmann, en que, según parece, dos objetos indiscernibles no son idénticos, lo que estaría en contradicción con la posición leibniziana y actual de la identidad de lo indiscernible. Naturalmente, se podría introducir por definición arbitrariamente un tipo de identidad para la que no rige de antemano la identidad de lo indiscernible, pero tanto el trabajo de Behmann como también el presente artículo se ocupan sólo de la identidad tal como se utiliza habitualmente. Antes de entrar en materia se darán algunas indicaciones respecto a la identidad y lo indiscernible.

La identidad es una de las relaciones que los objetos (individuos, clases, etc.) tienen consigo mismos. Esto no significa que podemos considerar únicamente el caso trivial en que se afirma que $a = a$. Mucho más instructivo es el caso de que $a = b$, o sea, de que el objeto denotado por "a" (el objeto a) es el mismo que el objeto denotado por "b" (el objeto b). En otras palabras, no nos interesa tanto que $4 = 4$ sino más bien que $2 + 2 = 4$ (que el número denotado por "$2 + 2$" es el mismo que el denotado por "4"). Para tener una terminología correcta, evitamos decir que *dos* objetos son idénticos, sino decimos, en forma precisa, que el objeto a es idéntico al objeto b (siendo a el mismo que b).

Las expresiones (de un lenguaje determinado) que denotan un mismo objeto se llamarán "(extensionalmente) sinónimas", de modo que si $a = b$, entonces "a" y "b" son sinónimas, pero no en general idénticas. La identidad se refiere a objetos, la sinonimia, a expresiones que denotan objetos. Sin embargo, puede ocurrir también que la expresión s sea idéntica a la expresión t, en este caso las *meta*-expresiones que denotan s, respectivamente t, serían sinónimas.

La "identidad" entre individuos, clases, clases de clases, etc., se define en el sistema superior de funciones (el sistema de Whitehead y Russell) según el siguiente esquema para las diferentes órdenes:

$$F = G =_{df} (K)\,(KF \equiv KG)$$

donde F y G son de un orden más bajo que K. En palabras: "F es idéntico a G" es definido por "para todas las funciones K, si F satisface una, también lo hace *G*, y viceversa[1]". Así *F* y *G* son idénticos, si, y sólo si, satisfacen las mismas funciones. Más precisamente debería decirse "si, y sólo si, satisfacen las mismas funciones *uniposicionales*", pero cualquier diferencia respecto a funciones *n*-posicionales con $n > 1$ se presenta automáticamente también para las uniposicionales.

Ahora bien, satisfacer las mismas funciones equivale a ser lógicamente indiscernible, porque si dos objetos son lógicamente discernibles hay, gracias a la discernibilidad, funciones que se satisfacen por uno de ellos y no por el otro, y a la inversa si hay funciones que se satisfacen por un objeto y no por el otro, entonces estas funciones permiten discernir entre los dos objetos. Se podría decir que "satisfacer las mismas funciones" es el término que representa formalmente el de "ser lógicamente indiscernible", de modo que la identidad de *F* y *G* significa que *F* es lógicamente indiscernible de *G*.

La definición formal de "identidad" se formuló respecto a un sistema determinado. Naturalmente, para sistemas análogos vale lo mismo. Sin embargo, en un caso concreto habría que hacer referencia al sistema respectivo y además al universo del discurso en cuestión. Las dos cosas son indispensables para un tratamiento riguroso, pues es posible que *a* y *b* sean idénticos en un sistema o respecto a un universo, para ser diferentes en otro sistema o para otro universo. Correspondientemente *a* y *b* serían indiscernibles en un caso y discernibles en el otro. Un ejemplo aclarará esta *relativización de la identidad*. Tengamos un universo que contiene sólo los números naturales *1, 2, 3* y *4*; todos los símbolos numéricos aparte de *"1"*, *"2"* y *"3"* denotan a *4*. Respecto a este universo *4* y *7* serían idénticos, mientras que no lo serían respecto a un universo que contiene todos los números naturales. En el primer caso *4* y *7* serían indiscernibles, porque satisfarían siempre las mismas funciones, mientras que en el segundo se dispone de una clara distinción lógica.

Consideramos ahora *k*-tuplos ordenados ($k = \omega$) de un tipo especial. En primer lugar figura una clase V no vacía, que será para lo que sigue el universo del discurso. También figuran en los *k*-tuplos una

[1] En el caso general del sistema aquí indicado se podría simplificar la definición, colocando "$\supset$" en lugar de "$\equiv$" y suprimiendo correspondientemente "y viceversa".

Indicando los órdenes por subíndices, tendríamos que escribir para *"F"* y "G" "$_n$" y para *"K"* "$_{n+1}$", considerando que los individuos son de orden *0*, las clases de orden *1*, las clases de clases de orden *2*, etc.

clase $\Phi_{(0)}$ de funciones (proposicionales) uniposicionales de primer orden sobre V, una clase $\Phi_{(00)}$ de funciones biposicionales de primer orden sobre V, etc., una clase $\Phi_{((0))}$ de funciones uniposicionales de segundo orden sobre V; etc. Un tal k-tuplo es para el sistema superior de funciones lo que se llama una "realización posible", y sería, además, si se cumplen ciertas condiciones de interpretación, un modelo. Si $\Phi_{(0)}$ sería la clase de *todas* las funciones uniposicionales de primer orden que se pueden formar sobre V y $\Phi_{(00)}$ la de *todas* las funciones biposicionales de primer orden que se pueden formar sobre V, etc., entonces el k-tuplo en cuestión sería una *realización estandardizada* (correspondería a un modelo estandardizado).

Siendo H una función biposicional de primer orden sobre V, $\lambda x(Hxb)$ sería la clase de los valores del primer argumento de H para b (más simple "la *1*-clase de H para b") y correspondientemente $\lambda x(Hax)$ sería la clase de los valores del segundo argumento de H para a (más simple "la *2*-clase de H para a"). Esta terminología puede generalizarse a funciones n-posicionales con $n > 2$ y que no son necesariamente de primer orden; tendríamos entonces la clase de los valores del i-ésimo argumento (la i-clase) de J para... (en lugar de los puntos suspensivos figura el $(n - 1)$-tuplo de los valores para los demás argumentos de J). Si ahora tenemos un k-tuplo en que $\Phi_{(0)}$ contiene *todas* las i-clases de primer orden de cualquier función que pertenece a una de las clases Φ, y si vale lo mismo para $\Phi_{((0))}$ y las i-clases de segundo orden, etc., entonces decimos que el k-tuplo es una *realización regular* (correspondería a lo que se llama aquí "modelo regular"). Se ve sin dificultad que toda realización estandardizada también es regular, pero hay realizaciones regulares que no son estandardizadas.

Si consideramos ahora la identidad no para el sistema superior de funciones en general, sino restringido a determinados modelos, entonces el hecho de satisfacer las mismas funciones *uniposicionales* sigue coincidiendo con la indiscernibilidad lógica, siempre que el modelo (aunque no estandardizado), sea por lo menos regular, porque la discernibilidad respecto a las funciones n-posicionales queda reflejada en las uniposicionales. Esta situación cambia si el modelo no es regular; si se desea trabajar respecto a ese modelo con una identidad que corresponda a la satisfacción de las mismas funciones, habría que cambiar el esquema de definiciones que estaba restringido a las funciones uniposicionales, estableciendo ahora que F y G son idénticos, si y sólo si, satisfacen las mismas funciones uniposicionales y (junto con objetos dados en un orden determinado) las mismas funciones biposicionales, triposicionales, etc.[2].

Hasta el momento se trató únicamente la indiscernibilidad lógica; sólo ella implica identidad. El hecho de que no sea posible discernir *empíricamente,* no implica automáticamente la identidad de los objetos respectivos, contrariamente a lo que se señala en algunas publicaciones sobre la física de los cuantos. Dos partículas, aunque no se les puede ubicar (incluso si estuviesen mutuamente interpenetrados), siguen siendo lógicamente discernibles. Naturalmente se puede en un caso determinado también identificar lo empíricamente indiscernible con lo lógicamente indiscernible (o trabajar con superobjetos que corresponden a combinaciones de objetos empíricamente indiscernibles), según la relatividad de la identidad; pero entonces hay que ser consecuente, abandonando también la distinción lógica. La lógica y las matemáticas ofrecen, en general, muchas posibilidades de tratamiento; sólo se exige, cuando se aplica uno de ellos, que se le aplique consecuentemente y que no se oscile entre varios para obtener una y otra seudoparadoja llamativa.

Trataremos ahora el caso señalado por Behmann de que (aparentemente) dos objetos indiscernibles no sean idénticos. Los dos objetos son i $(\sqrt{-1})$ y $-i$, que se introducen como raíces de la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

Según Behmann son indiscernibles, pues (en la teoría de los números complejos) "...se podría, en todas las partes, reemplazar i por $-i$ (y obligatoriamente $-i$ por i), sin que de hecho hubiese algún cambio. Es así en principio imposible distinguir uno de los dos valores del otro..." (p. 42). Por otro lado demuestra que, si fueran idénticos se produciría una contradicción, de modo que tienen que ser diferentes.

Crítica: En la teoría de los números complejos no se introducen sólo las dos raíces i y j de la ecuación "$x^2 + 1 = 0$", sino se establece, además, que $j = -i$. *Gracias a esta suposición adicional,* Behmann logró derivar su contradicción:

$$\begin{aligned} i &= -i \\ i - (-i) &= 0 \\ 2i &= 0 \quad !! \\ i &= 0 \end{aligned}$$

[2]Análogamente, si se tratan las funciones n-posicionales con $n > 1$ como uniposicionales de un orden superior, según Wiener y Kuratowski, entonces habría que extender la exigencia de la satisfacción de las mismas funciones *uniposicionales* a los pares ordenados, etc., en que figuran F y G.

lo que contradice a la ecuación original. Pero si en lugar de "$-i$", se escribe "j", se obtiene:

$$i - j = 0$$

ecuación que no conduce a:

$$2i = 0$$

Sin embargo, no se critica aquí la suposición adicional ni el resultado de Behmann de que i y j ($-i$) son diferentes; lo que se critica es que sean indiscernibles. Ya la suposición adicional indica un discernimiento, que se hace más claro todavía si consideramos los números imaginarios puros ordenados según magnitud, porque entonces i satisface la función *ser mayor que 0* y $-i$ la función *ser menor que 0.*

Aunque ya con esto todo el problema queda resuelto, conviene dar algunas indicaciones adicionales, que permiten ver cómo se formó posiblemente.

Sean a y b dos individuos (diferentes). Ellos se llamarán "polares respecto a la función proposicional biposicional de primer orden F", si cumplen con las siguientes condiciones:

(1) Tenemos Fab y Fba, pero ni Faa ni Fbb;
(2) Al satisfacer a junto con c, siendo c diferente de a y de b, (en un orden determinado) la función F, lo hace también b junto con c, y viceversa.

Los dos individuos a y b se llamarán "antipolares respecto a F", si cumplen con:

(1) Tenemos Faa y Fbb, pero ni Fab ni Fba;
y con la condición (2) de arriba.

Los individuos a y b se llamarán "polares respecto a una clase $\triangle$ de funciones proposicionales biposicionales de primer orden", si:

(1) Son polares respecto a todos los elementos de una subclase no vacía de $\triangle$;
(2) Son antipolares respecto a todos los elementos de una subclase posiblemente vacía de $\triangle$;
(3) Para las demás funciones de $\triangle$, si a junto con un individuo cualquiera (en un orden determinado) satisface una, entonces también lo hace b, y viceversa.

En otras palabras, a y b tendrían que ser polares respecto a algunas funciones, antipolares respecto a otras e indiscernibles, respecto a las demás. Para cualquier par de individuos pueden formarse varias, tal vez infinitas, clases $\triangle$ respecto a las cuales son polares.

Estas definiciones pueden extenderse sin dificultad a las funciones n-posicionales de primer orden con $n > 2$.

Tengamos ahora un modelo en que a y b pertenecen al universo del discurso y donde $\triangle$, una clase respecto a la cual a y b son polares, sea la clase de las funciones biposicionales de primer orden. Este modelo no es estandardizado, porque para ello $\triangle$ debería incluir funciones que, según la definición de "polaridad", no pertenecen a $\triangle$.

Se ve que los individuos a y b, aunque polares respecto a $\triangle$, son perfectamente discernibles; hay por lo menos, una función F tal que Fab, pero no Fbb. Si el modelo es regular, entonces a pertenece a una clase $\lambda x(Fxb)$, a la cual b no pertenece. En otras palabras: Polaridad (que supone diferencia) implica discernibilidad. También bastaría que $\triangle$ incluyese una función respecto a la cual a y b son antipolares para que haya discernibilidad.

Naturalmente, existe ahora una dificultad para definir "a" y "b". Si como únicos símbolos funcionales en el *definiens* se admitiesen las que denotan funciones de $\triangle$, no es posible definir "a" y "b", porque para definir "a" es necesario haber definido "b", y viceversa. Para hacer posible la definición, uno de los dos símbolos "a" o "b" tiene que figurar como símbolo básico no definido. Sin embargo, estas dificultades de definición no justifican, de ninguna manera, considerar a y b como indiscernibles.

En el problema de Behmann se puede hacer referencia a una clase $\triangle$ respecto a la cual i y j (tratados aquí como individuos) son polares[3]. Una función respecto a la que son polares sería por ejemplo:

la suma de ... y de ... es igual a 0

mientras que respecto a:

el producto de ... y de ... es igual a —1

son antipolares. Aunque también existen las mencionadas dificultades para definir "i" y "j", todo esto no elimina de ninguna manera la dis-

[3]Lo mismo vale para un objeto y su "imagen" en el otro ejemplo de Behmann del mundo simétrico delante y detrás del espejo (pp. 39, 40).

cernibilidad de *i* y *j*. Se trata de dos objetos no idénticos *y discernibles*, de modo que este caso no sirve como argumento contra la identidad de lo indiscernible.

Bibliografía

Behmann, H., *Drei Aporien der Identitaet*, en Kaesbauer, M. y v. Kutschera, F., Logik und Logikkalkuel, Friburgo-Munich, 1962, pp. 19-48.

Stahl, G., *Le Problème de l'existence dans la logique symbolique*, Revue Philosophique de la France et de l'étranger, París, 1960, Nº 1, pp. 97-104.

— *Temps et Existence*, Revue Philosophique de la France et de l'étranger, París, 1961, Nº 4, pp. 501-507.

— *Linguistic Structures Isomorphic to Object Structures*, Philosophy and Phenomenological Research, Philadelphia, 1964, Nº 3, pp. 339-344.

Wittgenstein, L., *Tractatus Logico-Philosophicus*, Londres, 1922.