

SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMATICA*

Charles Sanders Peirce

1

RE La matemática trata en lo esencial de signos. Todo lo que sabemos o pensamos lo sabemos o pensamos a través de signos y nuestro propio saber es un signo. La palabra y la representación de un signo son confiables, pero inexactos. Queremos intentar analizar esto.

Está desde un comienzo fuera de duda que en primer lugar un signo no es ninguna réplica especial en sí mismo. Si examinamos una página de un libro, entonces cada "the" es la misma palabra y cada "e" la misma letra. La identidad exacta no está clara. En segundo lugar un signo puede ser complejo, y las partes del signo, aun cuando ellas mismas sean signos, no necesitan poseer todas las notas esenciales de un signo completo. En tercer lugar, un signo suficientemente completo debe determinar un signo interpretable y finalmente poder proporcionar verdaderos resultados. Porque una proposición metafísica que nunca pudiera contribuir a determinar el comportamiento, sería charla vacía. Por otro lado, pueden ser consideradas como verdaderos signos por ejemplo las tarjetas, esas que se insertan en una máquina de tejer Jacquard y culminan en un tejido a través del modelo correspondiente, aun cuando no son interpretadas. En realidad la conciencia, en el estado actual de la filosofía, es claramente sólo una cualidad de la sensación (*Gefühlsqualität*), de la que no se ocupa preferencialmente una ciencia formal. Pero un signo funciona como signo cuando es interpretado. Por eso es esencial que se pueda determinar un signo interpretable. En cuarto lugar un signo suficientemente completo debe corresponder en cierto sentido a un objeto real. Un signo puede entonces ser falso, a lo más, cuando especifica el objeto real en un grado determinado de exactitud, respecto del cual es falso. Se ha destacado en primer término que el signo mismo no es un objeto

* El Profesor Dr. Max Bense –a cuya Memoria dedico esta labor de traducción– señala como fecha probable del manuscrito inédito "On the foundations of Mathematics" de Charles S. Peirce el año 1903. Fue dado a conocer por Edition Rot, Stuttgart, en 1976. (N. de la t.).

real, definido. El objeto sólo es representado. Ahora bien, las cosas deben ser así, o algo existe realmente, o es representado, o debe ser falso cuando no es el caso. Esto supone que todo objeto real puede ser una representación o un signo, pero cuando se da eso debe compenetrarse más de la realidad que si fuera mera representación.

En la medida en que un signo suficientemente completo puede ser falso y puesto que no es una réplica o colección de réplicas, no es real. Pero se refiere a un objeto real. Por lo tanto un signo puede no tener un signo como su objeto único, aun cuando pueda referirse a un objeto a través de un signo; como si dijera: "todo lo que el Papa declara como tal será verdad", o como si un mapa pudiera ser un mapa de sí mismo. Pero si suponemos que el Papa no declara nada, ¿se refiere esa proposición a algún objeto real? Sí, al Papa. En quinto lugar, aun cuando no hubiera un Papa hay no obstante un objeto único, definido, al cual debe referirse, como todos los otros signos suficientemente completos, es decir a la "verdad" o al absoluto o al universo completo de lo real. En sexto lugar un signo puede referirse complementariamente y de modo especial a una cantidad cualquiera de partes de ese universo. En séptimo lugar, cada interpretante¹ de un signo no necesita referirse a todos los objetos reales a los que se refiere el signo mismo, pero debe referirse al menos a la verdad. Si se diera el signo "Enoch fue un hombre y Enoch fue traducido", uno de sus interpretantes sería: "Un hombre fue traducido". En noveno lugar, un signo puede referirse a

¹ El 'interpretante' corresponde a una de las relaciones triádicas propuestas por Peirce para el signo. Esas relaciones son las siguientes:

- 1. Relación con el medio.
- 2. Relación con el objeto.
- 3. Relación con el interpretante: el hecho de que un signo es interpretable, tiene un significado (Bedeutung). Según lo señala Elisabeth Walther (*Allgemeine Zeichenlehre*. Deutsche Verlags-Anstalt. Stuttgart. 1974), fue Peirce el primero en ordenar de manera precisa este tema.

En lo relativo a 1 hay una siguiente relación triádica:

- 1.1 Qualisigno (a partir del término 'Quality', cualidad).
- 1.2 Sinsigno (es decir, signo singular).
- 1.3 Legisigno (del latín *lex, legis*).

En lo que respecta a 2 se propone la relación triádica:

- 2.1 Icono (el que tiene algún rasgo común con el objeto).
- 2.2 Índice (el que señala a su objeto o lo indica).
- 2.3 Símbolo (el que es independiente de semejanzas o vínculos directos y, en cambio, señala al objeto según convenciones del intérprete).

Finalmente, la relación 3 describe la siguiente tríada:

- 3.1 Rhema (del griego 'rhema', es el concepto de la lógica clásica).
- 3.2 Dicente (del latín 'dicere', es la proposición o el juicio).
- 3.3 Argumento (por ejemplo, el silogismo lógico). (Nota de la t.)

sus interpretantes de tal modo que en caso de que el primer signo sea incompleto, el interpretante del signo completo puede referirse a un signo al cual el primer signo no se refiere en particular sino sólo de modo general. Así el signo "Todo hombre es mortal" no se refiere a un hombre real, es decir, es parte casualmente de un signo que se refiere a una tal cosa real de otro modo. Pero cuando es parte de un signo, del cual otro es parte: "Algunos hombres cantan", el signo "Algunos hombres son mortales" resulta ser su interpretante. Esto se puede expresar mejor cuando se distingue entre "hablante" e "intérprete". Entonces el hablante dice al intérprete: "eres libre de entenderme como quien se refiere a cada hombre en el cual puedes pensar, y de aquél digo: 'es mortal'". En décimo lugar, un signo suficientemente completo debe señalar una cualidad y es asimismo importante reconocer que el objeto real, al cual se refiere un signo, no es un mero signo, tanto como reconocer que la cualidad referida no es un mero signo. Tomemos la cualidad 'perfume' de una "esencia". No es difícil representarse un ente cuya entera conciencia consistiera sólo en ello. Pero, podríamos objetar, si al contrario lo anuláramos, ¿eso sería advertido? Mi respuesta es: no. Y fuera de ello una tal diferenciación está excluida por la circunstancia de que la advertencia del perfume no sería el perfume verdadero mismo. Algunos pueden sin embargo dudar de que pudiera existir precisamente la sensación. A los que piensan así debería poder convencerlos de mis ideas en verdad muy sencillamente. Porque ellos deberían aceptar al menos que tal cualidad de la sensación tan pura y homogénea no sería un signo, aun cuando pudiera existir. Cada uno debería aceptarlo, porque esa cualidad de la sensación (Gefühlsqualität) sería sola y sin objeto, lo que es en sí mismo diferente. Además no sería posible una réplica de ella, porque cada una de tales dos cosas (Etwase) no existiría para la otra; ni podría haber una tercera para compararlas. Así, la pregunta acerca de si una tal cualidad es un signo o no, se traslada a la pregunta acerca de si un tal matiz cromático pudiera darse en la conciencia de un ente, descontado que el ente tiene conciencia (porque mostraré ahora que el hecho de que durmiera habla en mi favor). Para poder dirimir esa cuestión, bastaría examinar algún objeto que es claramente rojo o azul y formularse a sí mismo algunas preguntas. ¿Se daría la posibilidad de proporcionarle a alguien la representación de ese rojo, al que no tiene la experiencia, que ese rojo sea más próximo que aquel azul? Por cierto que no, la cualidad del rojo está contenida en el rojo mismo. La proximidad del azul intensifica el impacto en el organismo del perceptor...².

Una cualidad es en sí misma tan simple como otra. Alguien, que estuviera

² Aquí en el Manuscrito falta la página 8, según se consigna en la traducción alemana. Esta página 8 fue posteriormente proporcionada por el Prof. M.H. Fisch. La misma fue incorporada en la publicación realizada por los editores Prof. Dr. Max Bense y Prof. Dra.

familiarizado sólo con los colores del espectro, no tendría una representación del blanco, si se le dijera que se trata de una mezcla de todos los colores. Se le podría decir hasta que mezclara agua con patriotismo y raíz de -1. Encuentren a alguien que no tuviera todavía una representación de patriotismo. Si le refieren que se trata del amor al propio país y si él sabe qué son amor y tierra natal, vistos socialmente, puede intentar reunir en su representación esas dos ideas, para construir la cualidad de sensación que resulta de esa reunión. Díganselo a la tarde y él repetirá el intento varias veces durante la noche, y él a la mañana tendrá una representación clara de lo que es patriotismo. Habrá llevado adelante un intento que es comparable con este otro, que alguien haya mezclado luz de color para lograr tener una representación del blanco. Cuando se entierra un tesoro en una planicie y hay cuatro reglas para mediciones, se puede determinar la ubicación del tesoro con ayuda de líneas de medición, de modo que alguien que pueda realizar sus propias medidas y tirar nuevas líneas, se encuentra en la situación de encontrar el tesoro. De modo parecido se puede definir el nombre de cualquier color con ayuda de las cuatro bandas de color, de modo que alguien pueda producir un color experimental, en primer lugar, con ayuda de un círculo de colores, según eso está en situación de aplicar el nombre. Toda definición que deba ser comprendida debe ser empleada como dirección experimental. La representación es un medio auxiliar para tales ensayos los que aunque a menudo cumplen su objetivo, se muestran sin embargo como insuficientes muy frecuentemente. Ningún punto de la planicie, en la cual está oculto el tesoro, es más simple que el otro. Los colores pueden ser fijados mediante diversos sistemas de coordenadas, y no sabemos si en sí mismo un color es más simple que otro. Podemos definir una cualidad como mezcla simple de dos cualidades sólo en una cantidad limitada de casos. En la mayoría de los casos es necesario introducir otras relaciones. Pero aun cuando una cualidad pueda ser definida al mismo tiem-

Elisabeth Walther: Edition Rot, Stuttgart 1976. La presente traducción, a partir de la Edition Rot y confrontada con la versión inglesa, cuenta con el beneplacito de la editora, Prof. Dra. Elisabeth Walter (Nota de la t.):

...lo refuerza, lo aviva, tal vez confunde un poco la sensación. Pero la cualidad 'rojo' es enteramente positiva y lo sería de todos modos aun cuando no hubiera azul. Si se quisiera eliminar cada idea, no habría impacto, sino adormecimiento. Pero la cualidad de ese adormecimiento se refería a la cualidad de ese rojo en el sentido de que si fuera a menudo quitada y restituida con el propósito de despertar al sujeto (Seienden), el tono cromático sería su conciencia de aquella cualidad. Es cierto que una cualidad en sí misma no tiene existencia. Necesita estar incorporada en algo que existe, pero la cualidad es como es, positiva y en sí. Esto no vale para el signo que existe sólo porque conduce al interpretante a referirse a un objeto. Una cualidad no es entonces un signo. En undécimo lugar podemos aceptar que ello, por comprensible inexactitud, es tanto verdadero para lo que se denomina una cualidad compuesta como para una cualidad simple.

po por medio de a y b, puede darse de todos modos la posibilidad de definirla por medio de c y d. Así pues todo, lo que es a o es c, tendrá una cualidad determinada p que es común y propia a esa clase. La clase de los objetos posibles, que son a o son d, tendrá una cualidad q, la que les es común y propia. La clase de los objetos posibles, que son b o son c, se referirá de modo similar a una cualidad r; y la clase de los objetos posibles, que son b o son d, se referirá de modo similar a una cualidad s. Entonces, esa cualidad que es a la vez a y b puede ser definida analíticamente como aquélla que es a la vez p, q, r y s y así sucesivamente ad infinitum.

Tal vez no podemos reconocer esas cualidades, pero hay suficientes fundamentos como para aceptar que toda clase describable de objetos posibles tiene una cualidad que le es común y propia. Es seguro que una cualidad pura, en su modo de ser como pura cualidad, no deja de existir porque no esté corporizada en nada. Cada situación de vida parece tener su cualidad particularmente sensible. Esa cualidad sensible es lo que es, de modo positivo y en sí misma. Para el ensayo de reproducirla se puede dar una instrucción correspondiente; pero la definición misma no tendrá aquella cualidad sensible. Cuando se dice que una cualidad sensible o que una cualidad pura se constituye por la reunión de otras dos, esto no quiere decir otra cosa que aquella cualidad sensible primera se reproduce cuando se mezclan esas cualidades de un modo experimental determinado. Todo signo suficientemente completo determina un signo con el objeto de que en una ocasión determinada, es decir, en un objeto determinado, se pueda observar una cualidad sensible determinada o una cualidad en general.

Se podría pensar que este punto de partida, analizar la naturaleza del signo, es innecesariamente complicado, antinatural e inadecuado. Al respecto respondo que cada persona tiene su propio modo de pensar; y si el lector tuviera tal impresión, podría elaborar por sí mismo una proposición. Si ella es suficientemente completa y exacta, el lector descubriría que se diferencia de mi análisis principalmente en su terminología y subdivisión. (Tal vez podría exigir distinciones que no he hecho por encontrarlas irrelevantes). Podrá comprobar que finalmente y de alguna forma discierne los mismos tres elementos fundamentales que yo he discernido. Es decir, debe primeramente diferenciar un modo de ser en sí mismo que corresponda a mi 'cualidad'; en segundo lugar, un modo de ser que se constituya mediante una oposición y corresponda a mi 'objeto'; y en tercer lugar, un modo de ser que pueda representarse mediante una ramificación 'y', tenga la naturaleza general de una función mediadora y corresponda al 'signo'.

2

Voy a retomar el problema siguiendo otro curso, en parte con la esperanza de reconciliar al lector con mi representación, y en parte para tomar en consideración otros puntos que pertenecen, asimismo, al asunto.

La referencia de un signo a la cualidad, que es su fundamento, fundamentación o significación se destaca con mayor intensidad en el modo del signo, en el cual cada réplica del signo es pertinente a un signo y precisamente porque tiene en sí misma cualidades determinadas, que poseería aun cuando el interpretante y el objeto no existieran. Naturalmente, en ese caso el signo no podría ser un signo; pero en tanto el signo fuera suficiente en sí mismo, todo ocurriría como con el objeto y el interpretante. Un signo, cuyo significado reposa por sí mismo en las cualidades de sus réplicas, es un ícono, imagen (Bild), análogo o una copia. Su objeto es todo aquello que le es parecido; para sus interpretantes es un signo de algo y tanto es un signo de aquel objeto cuanto le es semejante. Un ícono no puede ser un signo completo; pero es el único signo que trae al interpretante directamente a la cercanía más próxima del significado; y por este motivo es el tipo de signo con el que trabaja el matemático. Porque no sólo son íconos las figuras geométricas sino que las mismas hileras de letras algebraicas tienen relaciones que son análogas a aquellas formas que representan, aun cuando no todas esas relaciones se representen de modo icónico.

La referencia de un signo a su objeto es particularmente nítida en el modo de los signos, que pertenecen al signo, porque están respecto del objeto en una relación real, reactiva, que es en general una relación física y dinámica. A tal signo lo denomino índice. Tomemos como ejemplo una veleta (rosa de los vientos). Ese es un signo de los vientos, porque el viento la mueve activamente. Señala exactamente la dirección en la cual sopla el viento. En la medida que lo hace, involucra un ícono. El viento lo obliga a ser un ícono. Otro ejemplo es una foto, la que puede ser sólo un ícono de su objeto por el fundamento de las leyes ópticas implícitas en la cámara. Los índices transmiten información de ese modo. Son proposiciones, es decir, señalan unitariamente a sus objetos; la veleta, porque gira con el viento y porque demuestra ser así su interpretante; la foto, por razones parecidas. Cuando la veleta deja de girar, o cuando la lente fotográfica está mala, una u otra serán falsas. Pero entonces los índices serán en el mejor de los casos íconos. No es esencial para un índice que involucre un ícono de ese modo. Sólo que no transmitirá información cuando no contenga un ícono. El grito: "¡Oh!" puede ser una reacción directa en una situación determinada. Pero tal vez no transmita ninguna otra información. Un pronombre demostrativo transmite...³.

Las letras, en una figura geométrica, son un buen ejemplo de índices puros que no contienen íconos, es decir, que no obligan para nada a sus objetivos a

³ En la Edition Rot no aparece la advertencia correspondiente al segundo asterisco. (Nota de la t.). Traducción de la versión alemana: Margarita Schultz.

ser íconos. El grito: "¡Oh!" confunde en una cierta medida, puesto que contiene la misma cualidad del asombro que la situación que lo causa. El índice ejerce una presión sobre el interpretante y lo trae a una relación directa y real con el objeto, que es necesariamente un acontecimiento individual (o de modo indeterminado, un objeto), que hic et nunc es uno y definido.

Un tercer tipo de signos, que torna nítida la relación con el interpretante, no es adecuado como signo, porque corresponda de un modo definido a la cualidad que señala, ni porque esté como objeto en alguna relación reactiva, sino sólo y únicamente porque se lo interpreta como signo. A tal signo lo denomino símbolo. Un ejemplo de símbolo es la "Teoría del color" de Goethe. Está construida con letras, palabras, frases, párrafos y así sucesivamente; y la razón por la cual se refiere a colores y ordena las cualidades de los colores está en que es comprendida por cada uno de los que la lee. No sólo define los interpretantes, sino que señala explícitamente los determinates específicos (la admisión de la teoría que debiera determinar). La teoría es un 'argumento' a causa de que señala de modo específico sus interpretantes propuestos (entre una cantidad de miles de interpretantes posibles). Un índice puede ser un argumento desde cierta perspectiva; pero no en el sentido en que es referido aquí, como argumentación. Determina un interpretante de esa naturaleza sin proponerlo explícitamente. Cuando lo hace es un símbolo completo. Pero no es esencial que un símbolo lo haga. Borre Ud. la conclusión de una argumentación y se transformará en una frase (habitualmente una frase copulativa). Borre Ud. la parte de una frase y se transformará en un 'rhema' o un término, cuando se coloca un nombre propio en un hueco o varios nombres propios en varios huecos. Así las siguientes expresiones son 'rhemata':

Guitean mató ——
 —— mató ——

Probablemente los lógicos, en general, tomarían como una falsedad que yo caracterice a los rhemata como términos, pero no obstante, me atreveré a hacerlo.